

I Définition

📖 DÉFINITION 1

Une **fonction affine** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels donnés.

✎ EXEMPLES 1 ET 2

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$ est une fonction affine, avec $a = 2$ et $b = -3$.
- Pour convertir une température x exprimée en degrés Celsius en degrés Fahrenheit, on utilise la fonction g définie par $g(x) = 1,8x + 32$. C'est une fonction affine, avec $a = 1,8$ et $b = 32$.

Par exemple $g(100) = 1,8 \times 100 + 32 = 212$: l'eau bout à 100 °C, c'est-à-dire à 212 °F.

💡 REMARQUES

- Une fonction affine permet de modéliser un phénomène **continu** à croissance linéaire.
- Si $a = 0$, alors $f(x) = b$: on dit que f est une fonction **constante**.
- Si $b = 0$, alors $f(x) = ax$: on dit que f est une fonction **linéaire** (elle traduit une situation de proportionnalité).

II Calcul du coefficient a

✅ PROPRIÉTÉ 1

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

Pour tous nombres réels x_0 et x_1 distincts, on a alors :

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

🔍 DÉMONSTRATION

$$f(x_1) - f(x_0) = (ax_1 + b) - (ax_0 + b) = ax_1 - ax_0 = a(x_1 - x_0).$$

Comme $x_1 - x_0 \neq 0$, on peut diviser par $x_1 - x_0$: $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{a(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = a.$

REMARQUES

- Le nombre $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ est appelé le **taux d'accroissement** de f entre x_0 et x_1 . Pour une fonction affine, il est donc **constant**, égal à a .
- Lorsque x augmente de 1, $f(x)$ augmente de a : $f(x+1) = f(x) + a$. Des accroissements égaux de x entraînent des accroissements égaux de $f(x)$: c'est une **croissance linéaire**.

EXEMPLE 3

Soit f une fonction affine telle que $f(2) = 5$ et $f(-1) = -1$. Déterminer l'expression de f .

f est affine donc $f(x) = ax + b$ avec $a = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{5 - (-1)}{2 + 1} = \frac{6}{3} = 2$.

Donc $f(x) = 2x + b$. De plus $f(2) = 5$ donc $2 \times 2 + b = 5$, soit $b = 5 - 4 = 1$.

Conclusion : $f(x) = 2x + 1$. (Vérification : $f(-1) = 2 \times (-1) + 1 = -1$.)

III Représentation graphique

PROPRIÉTÉ 2

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ est la **droite** d'équation $y = ax + b$.

- a est le **coefficient directeur** de la droite : il est égal au taux d'accroissement de f .
- b est l'**ordonnée à l'origine** de la droite : la droite passe par le point de coordonnées $(0 ; b)$.

REMARQUES

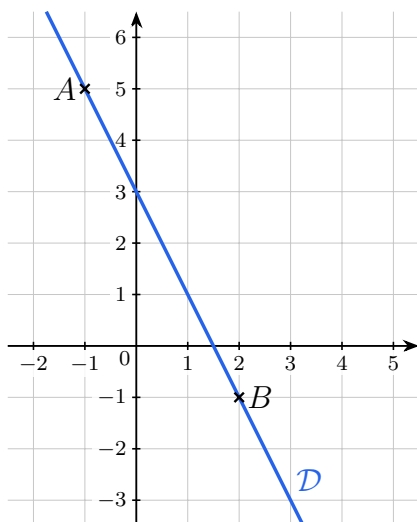
- Quand on se déplace de 1 vers la droite sur la droite, on monte de a si $a > 0$ et on descend de $-a$ si $a < 0$.
- Si f est constante ($a = 0$), la droite est parallèle à l'axe des abscisses.
- Si f est linéaire ($b = 0$), la droite passe par l'origine du repère.

EXEMPLE 4

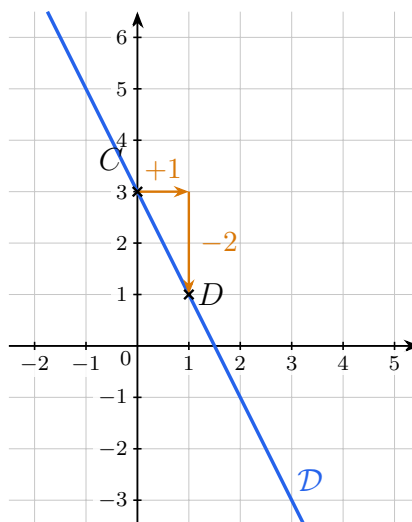
Soit f la fonction affine définie par $f(x) = -2x + 3$. Tracer sa représentation graphique $\mathcal{D}$.

1^{re} méthode : avec deux points. On sait que $\mathcal{D}$ est une droite ; il suffit donc de connaître deux de ses points. $f(-1) = -2 \times (-1) + 3 = 5$ et $f(2) = -2 \times 2 + 3 = -1$: la droite passe par les points $A(-1 ; 5)$ et $B(2 ; -1)$.

2^e méthode : avec l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur. L'ordonnée à l'origine est 3 : on place le point $C(0 ; 3)$. Le coefficient directeur est -2 : à partir de C , on avance de 1 et on descend de 2, on obtient le point $D(1 ; 1)$.



1^{re} méthode



2^e méthode

IV Sens de variation

✓ PROPRIÉTÉ 3

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

- Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Si $a > 0$, f est croissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f	↗	

Si $a < 0$, f est décroissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f	↘	

🔍 DÉMONSTRATION

Soient $x_0 < x_1$ deux réels. D'après la démonstration de la propriété 1, $f(x_1) - f(x_0) = a(x_1 - x_0)$ avec $x_1 - x_0 > 0$. Donc $f(x_1) - f(x_0)$ est du signe de a : si $a > 0$, $f(x_0) < f(x_1)$ (f est strictement croissante) ; si $a < 0$, $f(x_0) > f(x_1)$ (f est strictement décroissante).

EXEMPLE 5

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = -2x + 3$. Déterminer les variations de f .

$a = -2$ et $-2 < 0$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f		

V Problème de seuil

MÉTHODE

Une grandeur est modélisée par une fonction affine f . Pour savoir à partir de quelle valeur de x elle dépasse un seuil S , on résout l'inéquation $f(x) > S$.

Graphiquement, cela revient à chercher les abscisses des points de la droite situés au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = S$.



Attention : quand on multiplie ou divise les deux membres d'une inéquation par un nombre **strictement négatif**, on change le sens de l'inégalité.

EXEMPLE 6

On suppose que le niveau moyen des océans monte de 4 mm par an et qu'en 2025 il est 110 mm au-dessus de son niveau de 1993. On modélise ce niveau (en mm, par rapport à 1993) par $N(t) = 4t + 110$, où t est le nombre d'années écoulées depuis 2025. À partir de quand le niveau dépassera-t-il 210 mm ?

On résout $N(t) > 210$: $4t + 110 > 210$ donc $4t > 100$ donc $t > \frac{100}{4}$, soit $t > 25$.

Dans ce modèle, le niveau moyen des océans dépassera 210 mm au-dessus de celui de 1993 après 2050 ($2025 + 25 = 2050$).