Chapitre 3 : Suites arithmétiques — Maths 1ES – 2026

I Suites numériques

DÉFINITION 1

Une **suite numérique** u est une fonction, définie pour tous les entiers naturels n à partir d'un entier naturel p, qui, à tout entier naturel $n \geq p$, associe un nombre réel $u(n)$:

$$u : n \mapsto u(n)$$

Le nombre $u(n)$ est appelé le **terme de rang** n de la suite u et $u(p)$ est le **terme initial** de la suite u.

REMARQUE

Deux notations. Le terme de rang n se note $u(n)$ ou u_n.

EXEMPLE 1

La suite u des nombres pairs : 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; ...
Le terme initial est $u(0) = 0$; le deuxième terme est $u(1) = 2$; le troisième est $u(2) = 4$, etc.



Le premier terme est $u(0)$ (ou u_0), donc le **dixième** terme est $u(9)$ (ou u_9).

REMARQUES

Une suite peut être définie de deux façons :

- **par une formule explicite**, qui donne directement $u(n)$ en fonction de n. Par exemple, si $u(n) = 3n + 1$, alors $u(5) = 3 \times 5 + 1 = 16$;
- **par une relation de récurrence**, qui donne $u(n + 1)$ en fonction de $u(n)$ et qu'on complète par la valeur du terme initial. Par exemple, si $u(0) = 2$ et $u(n + 1) = u(n) + 5$, alors $u(1) = 2 + 5 = 7$ puis $u(2) = 7 + 5 = 12$.

II Suites arithmétiques

DÉFINITION 2

On dit qu'une suite u est **arithmétique** lorsque chaque terme se déduit du précédent en ajoutant **toujours le même nombre réel** r, appelé la **raison** de la suite.
Autrement dit, pour tout entier naturel n : $u(n + 1) = u(n) + r$ (ou $u_{n+1} = u_n + r$).

EXEMPLE 2

Soit u la suite définie par $u(0) = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u(n+1) = u(n) + 4$. C'est une suite arithmétique de raison 4.
$u(1) = u(0) + 4 = 5 + 4 = 9$ puis $u(2) = u(1) + 4 = 9 + 4 = 13$.

REMARQUES

- La relation $u(n+1) = u(n) + r$ est une **relation de récurrence**. Avec cette relation, pour calculer un terme, il faut calculer **pas à pas** tous ceux qui le précèdent.
- La raison peut être négative : si $u(n+1) = u(n) - 3$, alors u est arithmétique de raison $r = -3$.

MÉTHODE

Reconnaître une suite arithmétique. Pour savoir si une suite est arithmétique, on calcule les différences entre termes consécutifs, $u(1) - u(0)$, $u(2) - u(1)$, ...

- Si elles sont toutes égales à un même nombre r, la suite **peut** être arithmétique de raison r (c'est une conjecture, à démontrer avec $u(n+1) - u(n) = r$ pour tout n) ;
- si deux de ces différences ne sont pas égales, la suite **n'est pas** arithmétique.

EXEMPLES 3 ET 4

- Les nombres 1 ; 4 ; 7 ; 10 peuvent-ils être les premiers termes d'une suite arithmétique ?
  Calculons : $4-1=3$, $7-4=3$, $10-7=3$. Les différences sont égales : oui, ils peuvent être les premiers termes d'une suite arithmétique de raison 3.
- Les nombres 4 ; 8 ; 16 peuvent-ils être les premiers termes d'une suite arithmétique ?
  Calculons : $8-4=4$ mais $16-8=8$. Les différences ne sont pas égales : non, la suite n'est pas arithmétique.

EXEMPLE 5

Modélisation. Léa a 100 € sur un compte et décide d'y verser 30 € chaque mois. On note $u(n)$ la somme disponible sur le compte après n mois.
On a $u(0) = 100$ et $u(n+1) = u(n) + 30$: la suite u est arithmétique de raison 30.

III Terme de rang n

PROPRIÉTÉ 1

Soit u une suite arithmétique de terme initial $u(0)$ et de raison r. Pour tout entier naturel n, on a alors :

$$u(n) = u(0) + n\,r \qquad (\text{ou } u_n = u_0 + n\,r).$$

Cette relation est la **forme explicite** de $u(n)$.

DÉMONSTRATION

On passe d'un terme au suivant en ajoutant r : $u(1) = u(0) + r$, $u(2) = u(0) + 2r$, $u(3) = u(0) + 3r$, ...Pour atteindre le terme de rang n, on a ajouté n fois la raison r au terme $u(0)$: $u(n) = u(0) + n\,r$.

REMARQUE

Avec la forme explicite, on calcule **directement** un terme quelconque à partir de son rang, sans calculer les termes précédents.

EXEMPLE 6

Soit u la suite arithmétique de terme initial $u(0) = 3$ et de raison $r = 2$. Alors $u(n) = 3 + 2n$ et $u(10) = 3 + 2 \times 10 = 23$.

REMARQUE

Si le terme initial est $u(1)$, le terme de rang n est $u(n) = u(1) + (n-1)\,r$. Plus généralement, si la suite commence au rang p : $u(n) = u(p) + (n-p)\,r$.

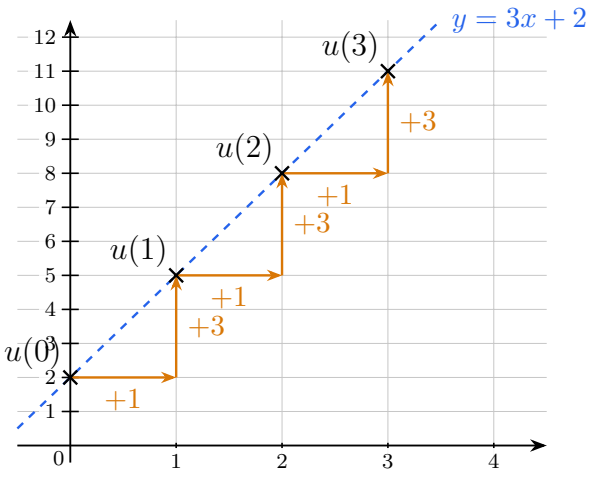
EXEMPLE 7

Soit v la suite arithmétique de premier terme $v(1) = 107$ et de raison $r = -13$. Alors $v(n) = 107 - 13(n-1)$ et $v(11) = 107 - 13 \times 10 = 107 - 130 = -23$.

IV Représentation graphique et variations

DÉFINITION 3

Dans un repère, la **représentation graphique** d'une suite u est le nuage de points de coordonnées $(n\,;u(n))$, où n est un entier naturel.



EXEMPLE 8

Soit u la suite arithmétique définie pour tout entier naturel n par $u(n) = 2 + 3n$. Ses quatre premiers termes sont $u(0) = 2$, $u(1) = 5$, $u(2) = 8$ et $u(3) = 11$: ils sont représentés ci-contre.

REMARQUES

- Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique u de raison r sont **alignés** : ils appartiennent à la droite d'équation $y = rx + u(0)$ (coefficient directeur r).
- Cette droite est la représentation de la fonction affine $f : x \mapsto rx + u(0)$ et $u(n) = f(n)$. Une suite arithmétique modélise une grandeur **discrète** à croissance linéaire (valeurs isolées, rangs n entiers), alors qu'une fonction affine modélise une grandeur **continue** (x prend toutes les valeurs d'un intervalle). À chaque pas de 1 en abscisse, l'ordonnée varie de r.

PROPRIÉTÉ 2

Soit u une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors pour tout entier naturel n, $u(n+1) > u(n)$. La suite est alors dite **croissante**.
- Si $r < 0$, alors pour tout entier naturel n, $u(n+1) < u(n)$. La suite est alors dite **décroissante**.
- Si $r = 0$, alors pour tout entier naturel n, $u(n+1) = u(n)$. La suite est alors **constante**.

DÉMONSTRATION

Pour tout entier n, $u(n+1) - u(n) = r$. La différence $u(n+1) - u(n)$ est donc du signe de r.

EXEMPLES 9 ET 10

- u est arithmétique de raison $r = 2$: $2 > 0$, donc u est croissante.
- v est arithmétique de raison $r = -3$: $-3 < 0$, donc v est décroissante.

V Problème de seuil

MÉTHODE

Une grandeur est modélisée par une suite arithmétique u. Pour déterminer à partir de quel rang elle dépasse un seuil S (ou passe sous ce seuil), on procède ainsi :

1. on écrit la forme explicite $u(n) = u(0) + nr$;
2. on résout l'inéquation $u(n) > S$ (ou $u(n) < S$) ;
3. on conclut avec le **plus petit entier** n qui convient.



Attention : quand on multiplie ou divise les deux membres d'une inéquation par un nombre **strictement négatif**, on change le sens de l'inégalité.

EXEMPLES 11 ET 12

- Avec l'épargne de Léa (partie II), $u(n) = 100 + 30n$. On cherche à partir de quel mois la somme dépasse 1 000 € : $100 + 30n > 1\,000$, donc $30n > 900$, donc $n > \dfrac{900}{30} = 30$. Le plus petit entier est $n = 31$: au bout de 31 mois ($u(31) = 1\,030$ €; pour $n = 30$, $u(30) = 1\,000$ ne dépasse pas 1 000).
- Un réservoir contient 5 000 L d'eau et perd 100 L par jour. Le volume $v(n)$ au bout de n jours vérifie $v(n) = 5\,000 - 100n$ (suite arithmétique de raison -100). On cherche quand il passe sous 1 000 L : $5\,000 - 100n < 1\,000$, donc $-100n < -4\,000$, donc $n > \dfrac{-4\,000}{-100} = 40$. Le plus petit entier est $n = 41$: au bout de 41 jours ($v(41) = 900$ L).