Chapitre 3 : CALCUL LITTÉRAL



I. Définitions et rappels.

DÉFINITION 1

Une expression littérale est un calcul contenant une ou plusieurs lettres qui désignent des nombres réels.

DÉFINITION 2

Réduire une expression littérale, c'est l'écrire sous la forme d'une somme contenant le moins de termes possibles.

REMARQUES

Convention d'écriture :
On peut supprimer le signe "$\times$" lorsqu'il est placé :

- Devant une lettre.
  Par exemple : $2 \times x = 2x$ ou $x \times 5 = 5x$
- Devant une parenthèse.
  Par exemple : $x \times (3 + x) = x(3 + x)$ ou $(1 + 4x) \times x = x \times (1 + 4x) = x(1 + 4x)$

REMARQUES

Réductions d'expressions :

1. On peut ajouter des "termes en x" avec d'autres "termes en x" quand ils ont le même exposant.
   Par exemple $2x + 3x = 5x$; $5x^2 - 7x^2 = -2x^2$
2. On peut multiplier des "termes en x" avec :
   - des "termes en x" (ou des "termes en a" ou des "termes en y", etc.).
     Par exemple : $2x \times 5x = 10x^2$; $-3x \times 4y = -12xy$
   - des termes constants.
     Par exemple : $4x \times 3 = 12x$; $5 \times (-2x) = -10x$



On ne peut ni ajouter des "termes en x" avec des termes constants, ni ajouter des "termes en x" avec des "termes en y", ni ajouter des "termes en x" qui n'ont pas le même exposant.

- $3x + 4$ ne se réduit pas $(3x + 4 \neq 7x)$
- $3x^2 - 5x$ ne se réduit pas.

Exemples : Réduire et ordonner si possible les expressions suivantes :

$A = 4x \times 3x + 5 - 2x$ $B = 8x - 3x \times 5 + 6x - 8$

$C = 5x^2 + 8 \times 2x - 7x^2 + 4 - 3x + 1$ $D = 6x - 3 \times (5x^2) + 4x + 11x^2 + (2x)^2$

→ Réponses : $A = 12x^2 - 2x + 5$; $B = -x - 8$; $C = -2x^2 + 13x + 5$; $D = 10x$

II. Développer et factoriser.

1. **Définitions (rappels)**

DÉFINITION 3

Développer une expression littérale, c'est l'écrire sous la forme d'une somme de termes.

DÉFINITION 4

Factoriser une expression littérale, c'est l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs.

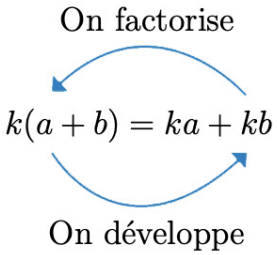
2. **Distributivité.**

PROPRIÉTÉ 1 ADMISE

Pour tous les nombres réels k, a, b, on a : $k(a + b) = ka + kb$

REMARQUE

On lit "k facteur de a plus b" égal "k" "a" plus "k" "b".



Exemples : Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = 4(3x - 2)$ $B = -2(-3x + 5) + 4x + 9$

$C = 5 - 3x(4 - 2x)$ $D = 4 - 5(2x + 3) + 9x + 11$

→ Réponses : $A = 12x - 8$; $B = 10x - 1$; $C = 6x^2 - 12x + 5$; $D = -x$

Exemples : Factoriser les expressions suivantes :

$A = 5x - 10$ $B = 4x^2 - 5x$

$C = 10x - 4x^2$ $D = x - 3x^2$

→ Réponses : $A = 5(x-2)$; $B = x(4x-5)$; $C = 2x(5-2x)$; $D = x(1-3x)$

REMARQUE

Cas particuliers : $-(a+b) = -a - b$ et $-(a-b) = -a + b$

DÉMONSTRATION

$-(a+b) = -1(a+b) = -1 \times a - 1 \times b = -a - b$
$-(a-b) = -1(a-b) = -1 \times a - 1 \times (-b) = -a + b$

Exemples : Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = 8 - (5x - 2)$ $B = 4x^2 - (-3x^2 + 5x) + 4x$

→ Réponses : $A = -5x + 10$; $B = 7x^2 - x$

3. **Double distributivité.**

PROPRIÉTÉ 2 ADMISE

Pour tous les nombres réels a, b, c et d, on a :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemples : Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (2x + 3)(4x - 1)$ $B = 14x - (3x - 5)(x + 6)$

→ Réponses : $A = 8x^2 + 10x - 3$; $B = -3x^2 + x + 30$

Exemples : Factoriser les expressions suivantes :

$A = (5x - 3)(4x + 1) + (4x + 1)(7x - 8)$ $B = (x + 6)^2 - (x + 6)(3x - 5)$

→ Réponses : $A = (4x + 1)(12x - 11)$; $B = (x + 6)(-2x + 11)$

4. **Identités remarquables.**

PROPRIÉTÉ 3

Identités remarquables. Pour tous les nombres réels a et b, on a :

- ♡ **Carré d'une somme :** $(a+b)^2 = (a)^2 + 2ab + (b)^2$
- ♡ **Carré d'une différence :** $(a-b)^2 = (a)^2 - 2ab + (b)^2$
- ♡ **Différence de deux carrés :** $(a+b)(a-b) = (a)^2 - (b)^2$

DÉMONSTRATION

Démonstration par la double distributivité :

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a \times a + a \times (-b) - b \times a - b \times (-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a \times a + a \times (-b) + b \times a + b \times (-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Exemples : Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (2x+5)^2$ $\qquad$ $B = (5x-2)^2$

$C = (2x+3)(2x-3)$ $\qquad$ $D = (4x-1)^2 - (3x+1)(2x-6)$

→ Réponses : $A = 4x^2 + 20x + 25$; $B = 25x^2 - 20x + 4$; $C = 4x^2 - 9$; $D = 10x^2 + 8x + 7$

Exemples : Factoriser les expressions suivantes :

$A = 9x^2 - 16$ $\qquad$ $B = 4x^2 - 20x + 25$

$C = 9x^2 + 30x + 25$ $\qquad$ $D = (4x-1)^2 - (3x+7)^2$

→ Réponses : $A = (3x-4)(3x+4)$; $B = (2x-5)^2$; $C = (3x+5)^2$; $D = (x-8)(7x+6)$

III. Équations.

1. Définitions et propriétés

DÉFINITIONS 5 ET 6

- Une équation est une **égalité** dans laquelle un (ou plusieurs) nombres sont remplacés par une lettre appelée **inconnue** (ou inconnues) de l'équation.
- **Résoudre** dans $\mathbb{R}$ une équation d'inconnue x, c'est déterminer tous les nombres réels x pour lesquels l'égalité est vraie. Ces nombres sont appelés les **solutions** de l'équation.

Exemples :

- L'égalité $2x - 4 = 7y + 9x - 37$ est une équation à 2 inconnues : x et y.
- L'expression $2x + 9y - 5$ n'est pas une équation.

- 4 est une solution de l'équation $2x-5=-2x+11$: si on remplace x par 4 dans le membre de gauche, on obtient : $2\times 4-5=3$ **PUIS** dans le membre de droite : $-2\times 4+11=3$.


On ne remplace pas x dans chaque membre en même temps !

REMARQUE

Une équation d'inconnue x du type $ax+b=c$ où a, b et c sont 3 réels donnés est appelée **"équation du 1er degré d'inconnue x"**.

Pour résoudre une équation du 1er degré à une inconnue, on cherche à isoler l'inconnue dans l'un des membres (plutôt celui de gauche). Pour cela, on utilisera les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 4

On ne change pas une égalité si on ajoute ou on retranche un même nombre réel à chacun de ses membres.

Exemple et méthode : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x+3=5$:
On peut retrancher 3 à chaque membre de l'égalité $x+3=5$
L'égalité $x+3=5$ est alors "équivalente" à l'égalité $x+3-3=5-3$
On note :
$x+3=5$
$x+3-3=5-3$
$x=2$
On vient alors de trouver LA solution de l'équation, on a donc résolu l'équation.
On note alors : $S=\{2\}$


Rien n'a ni "changé de côté" ni "changé de signe" dans l'équation ! On a "juste" appliqué la propriété 4 qui a permis de résoudre une équation.

PROPRIÉTÉ 5

On ne change pas une égalité si on multiplie ou divise par un même nombre réel non nul chaque membre de l'égalité.

Exemples et méthode :

(a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $5x=8$:
On peut diviser par 5 chaque membre de l'égalité $5x=8$
L'égalité $5x=8$ est alors équivalente à l'égalité $\frac{x}{5}=\frac{8}{5}$
On note :
$5x=8$

$\frac{x}{5} = \frac{8}{5}$

$x = \frac{8}{5}$

On vient alors de trouver LA solution de l'équation, on a donc résolu l'équation.

On note alors : $S = \left\{\frac{8}{5}\right\}$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-3x + 7 = 11$:

$-3x + 7 = 11$

$-3x + 7 - 7 = 11 - 7$

$-3x = 4$

$\frac{-3x}{-3} = \frac{4}{-3}$

$x = -\frac{4}{3}$

Donc $S = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$

REMARQUE

Cas particuliers : Il existe des équations qui, après réduction, sont de la forme : $0x = b$ où b est un nombre réel. Les solutions de ces équations sont alors particulières.
Exemples :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3x - x = 2x + 7$

  $3x - x = 2x + 7$

  $2x = 2x + 7$

  $2x - 2x = 2x - 2x + 7$

  $0x = 7$

  On arrive alors à une égalité qui n'EST JAMAIS vraie, quelle que soit la valeur de x choisie. On dit que l'équation n'a pas de solution et on note : $S = \emptyset$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2(x + 3) - 1 = 2x + 5$

  $2(x + 3) - 1 = 2x + 5$

  $2x + 6 - 1 = 2x + 5$

  $2x + 5 = 2x + 5$

  $2x - 2x + 5 - 5 = 2x - 2x + 5 - 5$

  $0x = 0$

  On arrive alors à une égalité qui est TOUJOURS vraie, quelle que soit la valeur de x choisie. On dit que tous les nombres réels sont solutions de l'équation et on note : $S = \mathbb{R}$

2. **Équation produit nul.**

Une **"équation produit nul"** (ou équation produit) est une équation dont un membre est un produit et l'autre membre est égal à zéro.

Pour résoudre une telle équation, on utilisera la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 6

Un produit de deux facteurs réels est nul si et seulement si l'un au moins de ces deux facteurs est nul.
Autrement dit, pour deux nombres réels a et b, $a \times b = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.

Exemples et méthode :

(a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(5x-2)(7x+21) = 0$

$(5x-2)(7x+21) = 0$

$5x - 2 = 0$ **OU** $7x + 21 = 0$

$5x = 2$ **OU** $7x = -21$

$x = \dfrac{2}{5}$ **OU** $x = -\dfrac{21}{7}$

$x = \dfrac{2}{5}$ **OU** $x = -3$

On trouve donc 2 solutions $\dfrac{2}{5}$ **ET** -3

On note : $S = \left\{\dfrac{2}{5}; -3\right\}$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4x^2 - 9 = 0$

On commence par factoriser le membre de gauche :

$4x^2 - 9 = 0$

$(2x-3)(2x+3) = 0$

$2x - 3 = 0$ OU $2x + 3 = 0$

$x = \dfrac{3}{2}$ ou $x = -\dfrac{3}{2}$

donc S $= \left\{\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{2}\right\}$

3. **Équation quotient nul.**

Une **"équation quotient nul"** est une équation dont un membre est un quotient et l'autre membre est égal à zéro.

Pour résoudre une telle équation, on utilisera la double propriété suivante :

PROPRIÉTÉS 7 ET 8

- Soit $a \in \mathbb{R}$, l'écriture fractionnaire $\dfrac{a}{b}$ existe si et seulement si b est un réel non nul.
- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{a}{b} = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b \neq 0$.

REMARQUE

Conséquence : Avant de résoudre une équation "quotient nul", il faut déterminer les "valeurs interdites" c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles le dénominateur est égal à 0.

Exemple et méthode 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\dfrac{-2x+10}{4x-1}=0$

- On détermine d'abord la valeur interdite, c'est-à-dire la valeur qui rend nul le dénominateur :
  $4x-1=0$ donne $x=\dfrac{1}{4}$.
  On résout donc l'équation sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.
- On applique la propriété. Pour tout réel $x\neq\dfrac{1}{4}$:
  $\dfrac{-2x+10}{4x-1}=0$ si et seulement si $-2x+10=0$
  $$-2x=-10$$
  $$x=\frac{-10}{-2}=5$$
- On vérifie que la solution trouvée est différente de la valeur interdite : $5\neq\dfrac{1}{4}$.
  Ainsi $S=\{5\}$.

Exemple et méthode 2 (deux méthodes) : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{x+2}$

Valeurs interdites : on cherche les valeurs qui annulent **chaque** dénominateur :

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x+2 & = & 0 \\ x & = & -2 \end{array}$$

Les valeurs interdites sont 0 et -2. On résout donc l'équation sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;0\}$.

- **Méthode 1 : on se ramène à une équation quotient nul.**
  Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\,;0\}$, les équations suivantes ont les mêmes solutions :
  $\dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{x+2}$
  $\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x+2} = 0$
  $\dfrac{1 \times (x+2)}{x(x+2)} - \dfrac{3x}{x(x+2)} = 0$
  $\dfrac{(x+2) - 3x}{x(x+2)} = 0$
  $\dfrac{-2x+2}{x(x+2)} = 0$
  On applique alors la propriété : $-2x+2 = 0$, donc $-2x = -2$, donc $x = 1$.
  On vérifie que la solution est différente des valeurs interdites : $1 \neq 0$ et $1 \neq -2$. Ainsi $S = \{1\}$.
- **Méthode 2 : on écrit l'égalité des produits en croix.**
  Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\,;0\}$, les équations suivantes ont les mêmes solutions :
  $\dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{x+2}$
  $1 \times (x+2) = 3 \times x$
  $x + 2 = 3x$
  $2 = 3x - x$
  $2 = 2x$
  $x = \dfrac{2}{2} = 1$
  On vérifie que la solution est différente des valeurs interdites : $1 \neq 0$ et $1 \neq -2$. Ainsi $S = \{1\}$.



ATTENTION : l'égalité des produits en croix ne s'utilise **QUE pour résoudre une ÉQUATION** (avec le signe $=$), quand il y a une fraction de chaque côté.

Ne JAMAIS l'utiliser dans une inéquation ($<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$) : on ne connaît pas le signe des dénominateurs, et l'inégalité peut alors changer de sens. En cas de doute, on utilise la méthode 1.