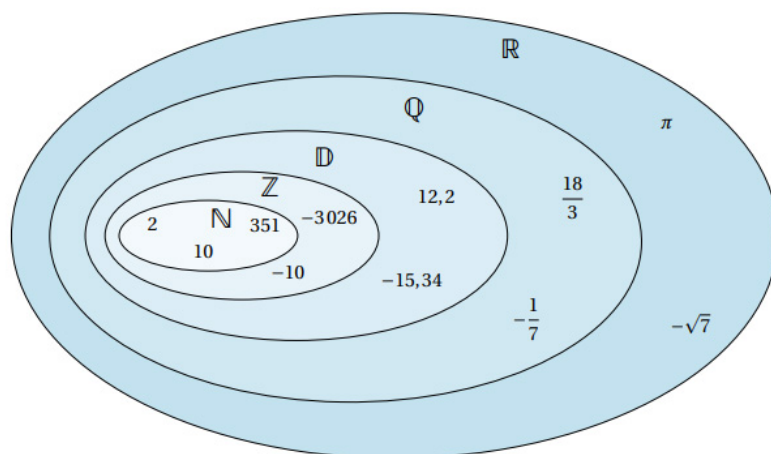


Chapitre 2 : Ensembles de nombres et intervalles.



I. Les ensembles de nombres.

1. Nombres entiers naturels.

DÉFINITION 1

L'ensemble des **nombres entiers naturels** est l'ensemble des nombres entiers positifs, c'est-à-dire les nombres 0, 1, 2, 3... Il est noté $\mathbb{N}$.

On a ainsi : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

2. Nombres entiers relatifs.

DÉFINITION 2

L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est formé des nombres entiers naturels et de leurs opposés. Il est noté $\mathbb{Z}$.

On a ainsi : $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

REMARQUE(S)

- La notation $\mathbb{Z}$ vient de "zahlen" qui signifie "nombres" en allemand.
- On dit aussi que $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers (sans préciser "relatifs").
- $\mathbb{Z}$ contient tous les éléments de $\mathbb{N}$. **On dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$** et on note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.



Attention : Ne pas confondre la notation $\in$ avec la notation $\subset$. Un nombre appartient à un ensemble, par exemple $2 \in \mathbb{Z}$ mais un ensemble est inclus dans un autre ensemble, par exemple $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

3. Nombres décimaux.

DÉFINITION 3

L'ensemble des nombres décimaux est formé des nombres de la forme $\frac{n}{10^k}$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$. Il est noté $\mathbb{D}$.

Exemples : $0,01 \in \mathbb{D}$ car $0,01 = \frac{1}{100}$, $\frac{3}{5} \in \mathbb{D}$ car $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$ car $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, $17 \in \mathbb{D}$ car $17 = \frac{17}{10^0}$.



Attention : De nombreux nombres écrits sous la forme d'une fraction n'appartiennent pas à $\mathbb{D}$. Par exemple $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Q DÉMONSTRATION

Montrons « par l'absurde » que $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Supposons que $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$, alors il existe un entier n et un entier naturel k tels que $\frac{1}{3} = \frac{n}{10^k}$.

Donc $10^k = 3n$ et donc 10^k est un multiple de 3 (ou divisible par 3).

Or 10^k est un nombre formé du chiffre 1 et de zéros, donc la somme de ses chiffres est égale à 1 et donc il ne peut pas être divisible par 3.

On arrive donc à une contradiction et donc $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

💡 REMARQUE(S)

- $\mathbb{D}$ est formé des nombres dont l'écriture décimale possède un nombre fini de chiffres (non nuls à partir d'un certain rang) après la virgule.
- Tout nombre entier est un nombre décimal donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

4. Nombres rationnels.

📖 DÉFINITION 4

L'ensemble des **nombres rationnels** est formé des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où p est un entier relatif et q est un entier naturel non nul. L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemples : $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{-2}{13} \in \mathbb{Q}$, $-3,871 \in \mathbb{Q}$.

💡 REMARQUE(S)

- Par définition, tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction (décimale) donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
- Certains nombres réels vus au collège ne sont pas des nombres rationnels, par exemple $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. La démonstration sera faite plus tard dans l'année.
- L'écriture décimale d'un nombre rationnel qui n'est pas décimal est **illimitée et périodique** : à partir d'un certain rang, un même bloc de chiffres se répète indéfiniment. Par exemple :

$$\frac{1}{3} = 0,3333\dots \quad \frac{5}{6} = 0,8333\dots \quad \frac{1}{7} = 0,142857142857\dots$$

Exemple : On note $x = 1,9999\dots$ (le chiffre 9 se répète indéfiniment). Que vaut x ?

En multipliant par 10, on décale la virgule : $10x = 19,9999\dots$

Les deux nombres ont la même partie décimale, donc en faisant la différence :

$$10x - x = 19,9999\dots - 1,9999\dots = 18 \quad \text{donc} \quad 9x = 18 \quad \text{donc} \quad x = \frac{18}{9} = 2.$$

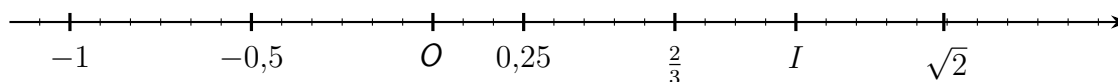
REMARQUE(S)

- Ce calcul n'est pas une démonstration rigoureuse : on a calculé avec une écriture qui possède une infinité de chiffres comme avec un nombre ordinaire, ce qu'il faudrait justifier. Le résultat est pourtant juste : $1,9999\dots$ et 2 sont **deux écritures du même nombre**.
- On peut le retrouver autrement : $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$ donc, en multipliant par 3 , $1 = 0,9999\dots$
- Ainsi $1,9999\dots$ est un nombre décimal, même si cette écriture comporte une infinité de chiffres : il admet aussi l'écriture finie 2 .

5. Nombres réels.

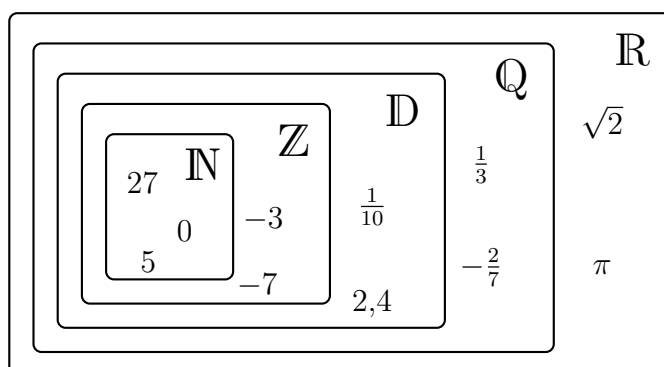
DÉFINITION 5

On considère une droite munie d'un repère $(O; I)$. L'ensemble des nombres réels est l'ensemble des abscisses des points de cette droite, appelée droite numérique. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.



REMARQUE(S)

- Tous les nombres rencontrés au collège sont des nombres réels.
 $\sqrt{2}$ et π sont des nombres réels qui ne sont pas des nombres rationnels. On dit que ce sont des nombres **irrationnels**.
- La géométrie fournit de tels nombres : $\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 (d'après le théorème de Pythagore) et π est la longueur d'un cercle de diamètre 1 .
- L'écriture décimale d'un nombre irrationnel est illimitée et non périodique : $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$ et $\pi = 3,14159265\dots$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



6. Encadrement et arrondi.

DÉFINITION 6

Soit x un nombre réel et n un entier naturel.

Donner un **encadrement décimal** de x à 10^{-n} près, c'est déterminer deux nombres décimaux a et b tels que $a \leq x \leq b$ et $b - a \leq 10^{-n}$.

Le nombre $b - a$ est appelé l'**amplitude** de l'encadrement.

Exemple : $3,141 \leq \pi \leq 3,142$ est un encadrement de π à 10^{-3} près, c'est-à-dire d'amplitude $3,142 - 3,141 = 0,001$.

Algorithme : encadrement de $\sqrt{2}$ par balayage.

On sait que $1^2 = 1 < 2$ donc $1 < \sqrt{2}$. On part de $x = 1$ et on avance par pas de 10^{-n} tant que le carré du nombre suivant $x + 10^{-n}$ reste inférieur à 2. Lorsque la boucle s'arrête, on a $x < \sqrt{2} < x + 10^{-n}$: c'est un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 10^{-n} .

```
1 def encadrement_racine2(n):
2     pas = 10**(-n)
3     x = 1
4     while (x + pas)**2 < 2:
5         x = x + pas
6     return round(x, n), round(x + pas, n)
```

La fonction `round(x, n)` arrondit x à n décimales : elle efface les petites erreurs de calcul que fait l'ordinateur sur les nombres à virgule.

n	1	2	3
<code>encadrement_racine2(n)</code>	(1.4, 1.5)	(1.41, 1.42)	(1.414, 1.415)
Encadrement obtenu	$1,4 \leq \sqrt{2} \leq 1,5$	$1,41 \leq \sqrt{2} \leq 1,42$	$1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$

REMARQUE(S)

- **Arrondir** un nombre réel à 10^{-n} près, c'est choisir, parmi les deux bornes de son encadrement à 10^{-n} près ayant n décimales, celle qui est la plus proche du nombre. Par exemple $\pi = 3,14159\dots$ donc $\pi \approx 3,142$ (arrondi au millième) et $\pi \approx 3,14$ (arrondi au centième).
- Les **chiffres significatifs** d'un nombre sont tous ses chiffres à partir du premier chiffre non nul en partant de la gauche. Par exemple 0,0305 possède 3 chiffres significatifs (3, 0 et 5) et 12,40 en possède 4.
- Dans un problème, on arrondit un résultat en gardant un nombre de chiffres significatifs adapté à la situation, en général le même que celui des données.

Exemple : Un rectangle a pour côtés 2,4 m et 3,7 m (mesures au décimètre près). D'après le théorème de Pythagore, sa diagonale mesure $\sqrt{2,4^2 + 3,7^2} = \sqrt{19,45} \approx 4,410215$ m. Donner autant de décimales n'a pas de sens puisque les côtés ne sont connus qu'avec 2 chiffres significatifs : on écrit que la diagonale mesure environ 4,4 m.

II. Intervalles réels

DÉFINITION 7

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$.

- L'intervalle $[a ; b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$.
- L'intervalle $[a ; +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geq a$.
- L'intervalle $] -\infty ; a]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \leq a$.

REMARQUE(S)

Pour exclure une borne d'un intervalle, on utilise un crochet tourné vers l'extérieur. Par exemple, l'intervalle $]a ; b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x \leq b$.

Ensemble des nombres réels x	Représentation	Intervalle
$a \leq x \leq b$		$[a ; b]$
$a \leq x < b$		$[a ; b[$
$x < b$		$] -\infty ; b[$
$x \geq a$		$[a ; +\infty[$

REMARQUE(S)

- Les deux réels qui délimitent un intervalle sont appelés les bornes de l'intervalle.
- $+\infty$ et $-\infty$ ne désignent pas des nombres réels, du côté de $+\infty$ et de $-\infty$, le crochet est toujours ouvert. L'ensemble $\mathbb{R}$ peut se noter : $] -\infty ; +\infty[$.
- On peut noter l'ensemble des réels positifs de 2 façons : $[0 ; +\infty[$ ou $\mathbb{R}^+$. De la même façon, on peut noter l'ensemble des réels négatifs : $] -\infty ; 0]$ ou $\mathbb{R}^-$.
- On peut noter l'ensemble des réels non nuls de 2 façons : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{R}^*$.
- On peut aussi mélanger les notations : $\mathbb{R}^{*+}$ pour l'ensemble des réels strictement positifs et $\mathbb{R}^{*-}$ pour l'ensemble des réels strictement négatifs.

Exemples :

- L'intervalle $[1 ; 3[$ est l'ensemble de tous les nombres réels compris entre 1 et 3, 1 inclus et 3 exclu.
- L'intervalle $] -\infty ; -2[$ est l'ensemble de tous les nombres réels strictement inférieurs à -2 .

DÉFINITION 8

L'amplitude de l'intervalle $[a; b]$ (ou $]a; b]$, $[a; b[$, $]a; b[$) est le nombre $b - a$.

III. Valeur absolue.

DÉFINITION 9

Soit x un nombre réel.

On appelle valeur absolue de x , et on note $|x|$, le nombre réel tel que :

- $|x| = x$ si $x \geq 0$
- $|x| = -x$ si $x \leq 0$

Exemples : $|4| = 4$ et $|-1,5| = 1,5$

REMARQUE(S)

La valeur absolue de x est la distance de x à 0 sur la droite numérique.

DÉFINITION 10

Soient a et x deux nombres réels.

La distance entre les nombres a et x est le nombre $|x - a|$.

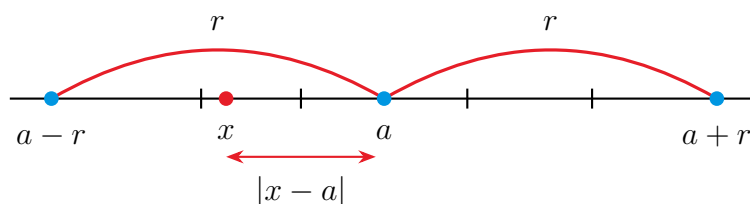
REMARQUE(S)

Pour tous nombres réels x et a : $|x - a| = |a - x|$.

PROPRIÉTÉ 1

Soient a et r deux nombres réels (avec $r \geq 0$).

L'ensemble des nombres réels x tels que $|x - a| \leq r$ est l'intervalle $[a - r; a + r]$.



Q DÉMONSTRATION

Soient a , x et r trois nombres réels (avec $r \geq 0$).

$x \in [a - r; a + r]$ ssi $a - r \leq x \leq a + r$ ssi $-r \leq x - a \leq r$ (1) (en soustrayant a).

1^{er} cas : $x - a \geq 0$. Alors $|x - a| = x - a$.

L'inégalité $-r \leq x - a$ est toujours vraie (car $-r \leq 0 \leq x - a$), donc (1) équivaut à $x - a \leq r$, c'est-à-dire à $|x - a| \leq r$.

2^e cas : $x - a < 0$. Alors $|x - a| = a - x$.

L'inégalité $x - a \leq r$ est toujours vraie (car $x - a < 0 \leq r$), donc (1) équivaut à $-r \leq x - a$, c'est-à-dire à $a - x \leq r$ (en multipliant par -1), soit $|x - a| \leq r$.

Dans les deux cas : $x \in [a - r; a + r]$ ssi $|x - a| \leq r$.

Exemples :

- La distance entre les nombres -10 et -4 est égale à $|-4 - (-10)| = |6| = 6$.
- En prenant $a = 5$ et $r = 0,1$: $x \in [4,9; 5,1]$ ssi $|x - 5| \leq 0,1$ ce qui revient à dire que la distance entre les nombres x et 5 est inférieure ou égale à $0,1$.

IV. Union et Intersection de deux intervalles.

DÉFINITION 11

Soient I et J deux intervalles.

On appelle **intersection** de I et J , et on note $I \cap J$, l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à la fois à I et à J .

DÉFINITION 12

Soient I et J deux intervalles.

On appelle **union** de I et J , et on note $I \cup J$, l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à I ou à J (ou aux deux).

Exemple : Soient les intervalles $I = [-1; 4]$ et $J =]2; +\infty[$. Leur intersection est l'intervalle $I \cap J =]2; 4]$ et leur union est l'intervalle $I \cup J = [-1; +\infty[$.

