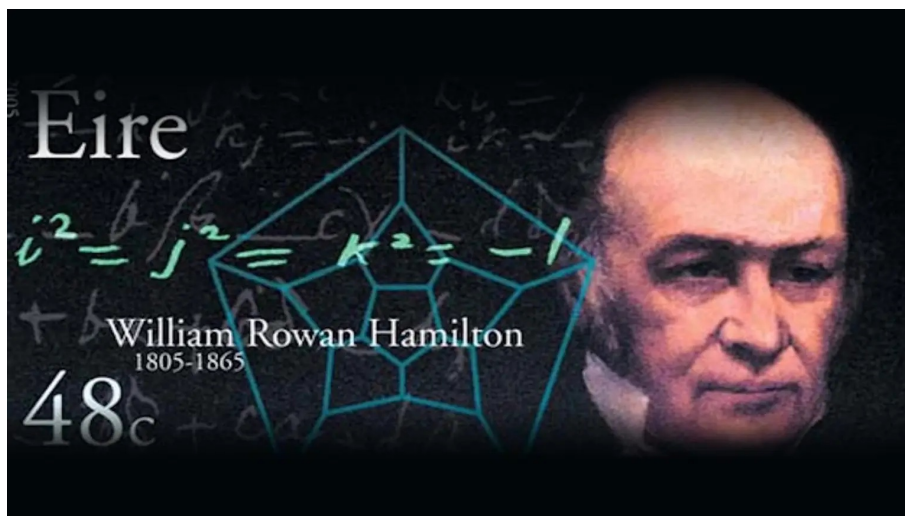


Chapitre I : Les vecteurs (partie 1)

Vecteurs et leurs propriétés

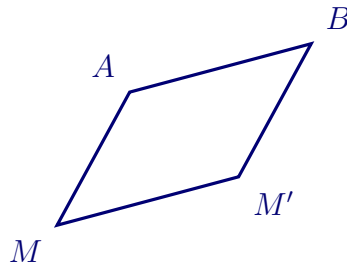


I. Notion de vecteur.

1. Parallélogramme : Rappels et compléments.

DÉFINITION 1

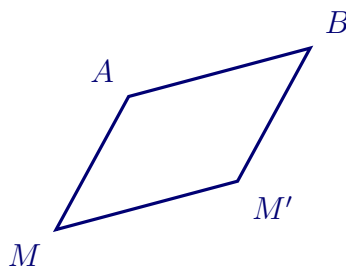
Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.



2. Translation et vecteur.

DÉFINITION 2

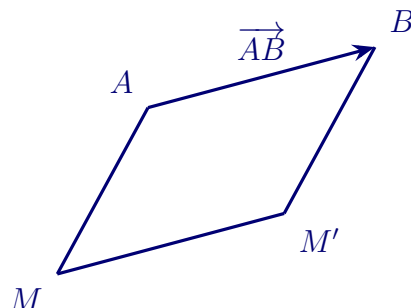
Soit A et B deux points distincts du plan. La translation qui transforme A en B est la transformation du plan qui à tout point M associe l'unique point M' tel que ABM'M soit un parallélogramme.



M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B

DÉFINITION 3

La translation qui transforme A en B est appelée translation de **vecteur** $\overrightarrow{AB}$.



REMARQUE(S)

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est représenté par une flèche allant du point A au point B. On dit que le point A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et que le point B est l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Si on veut désigner le vecteur $\overrightarrow{BA}$, on ne change pas le sens de la flèche mais on change l'origine et l'extrémité du vecteur.
- La translation qui transforme A en A est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$. Ce vecteur est alors appelé **vecteur nul** et il est noté $\vec{0}$.

II. Définitions et propriétés des vecteurs.

1. Caractérisation.

DÉFINITION 4

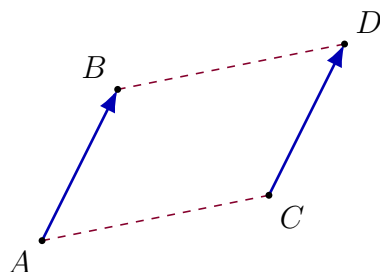
Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par 3 éléments :

- **Sa direction** : celle de la droite (AB) ,
- **Son sens** : le sens de A vers B,
- **Sa norme, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$** : la longueur AB.

2. Égalité de 2 vecteurs.

DÉFINITION 5

Soit A, B, C et D 4 points du plan. Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie que D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On note alors : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



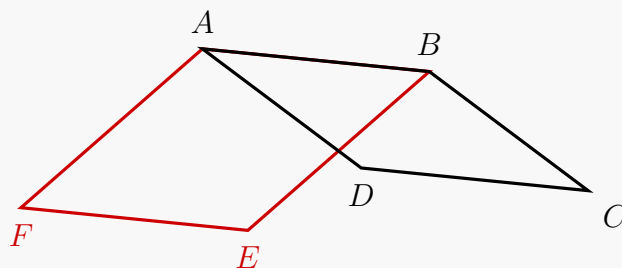
Conséquences de la définition :

✓ PROPRIÉTÉ 1

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
⚠ Attention à l'ordre : $ABDC$ et non pas $ABCD$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si **ils ont la même direction, le même sens et la même norme.**

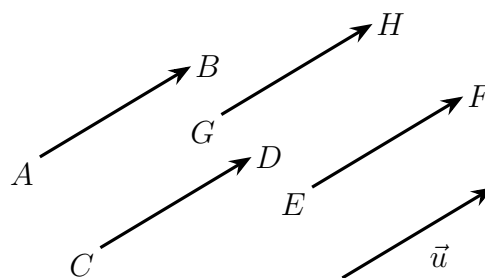
✎ EXERCICE(S) D'APPLICATION

- (a) Placer 3 points A, B, C non alignés. Construire un point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.
- (b) $ABCD$ et $ABEF$ sont deux parallélogrammes. Montrer que $DCEF$ est un parallélogramme.



3. Représentants d'un vecteur.

Étant donné deux points A et B , on peut construire une infinité de parallélogrammes dont un côté est le segment $[AB]$. On obtient ainsi une infinité de vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.



On dit que tous ces vecteurs sont des **représentants d'un même vecteur**, qu'on note à l'aide d'une lettre, souvent $\vec{u}$. Ils ont tous même direction, même sens et même norme.

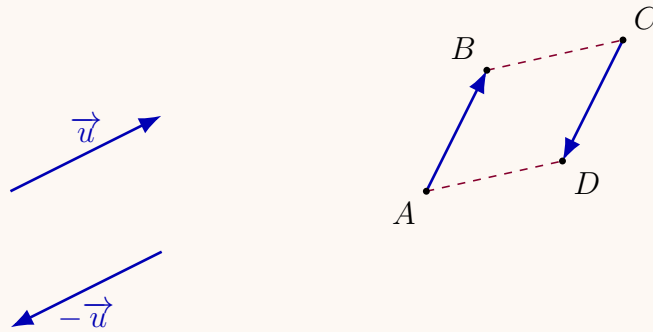
4. Vecteurs opposés.

📖 DÉFINITION 6

L'**opposé** d'un vecteur $\vec{u}$ est le vecteur noté $-\vec{u}$ ayant la même direction, la même norme mais de sens contraire.

EXEMPLE 1

Les vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ sont opposés. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont opposés ($\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$) :



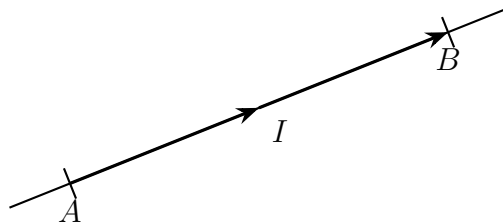
REMARQUE(S)

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés.

5. Milieu d'un segment.

PROPRIÉTÉ 2

Soit A et B deux points distincts. I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

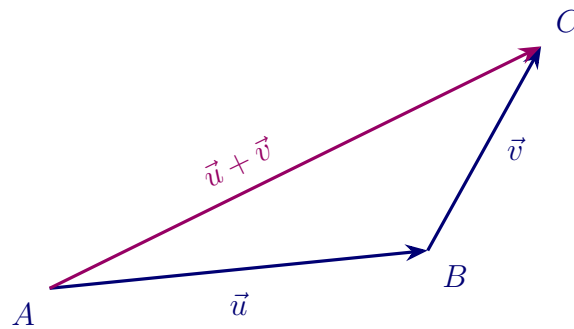


III. Somme de vecteurs.

1. Définition

DÉFINITION 7

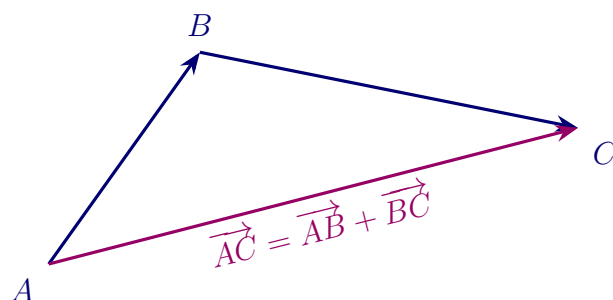
Si on applique la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$, on obtient une nouvelle translation. Le vecteur qui lui est alors associé est appelé **somme des vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note ce vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



2. Relation de Chasles.

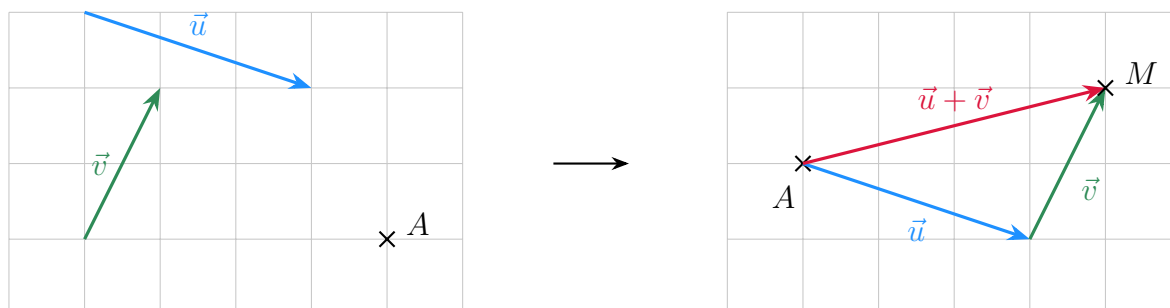
✓ PROPRIÉTÉ 3

Propriété admise : Quels que soient les points A , B et C du plan : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

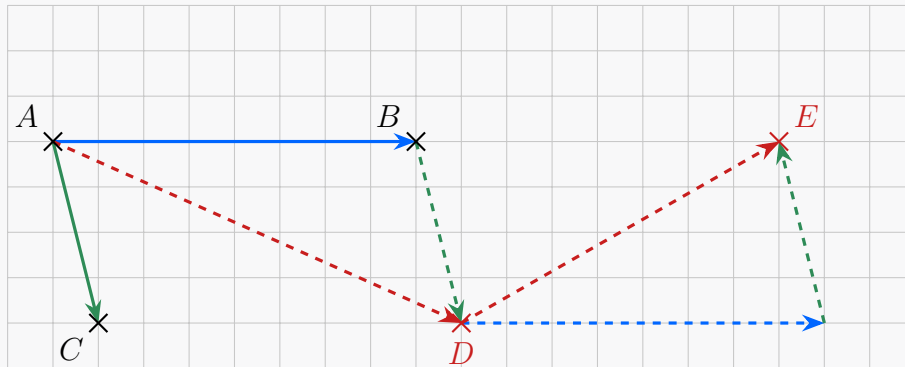


3. Application : construction de la somme de 2 vecteurs.

Construire le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$: On utilise la relation de Chasles :



Sur la figure ci-dessous, construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, le point E tel que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB}$



4. Propriétés algébriques.

Propriétés admises : Soient 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

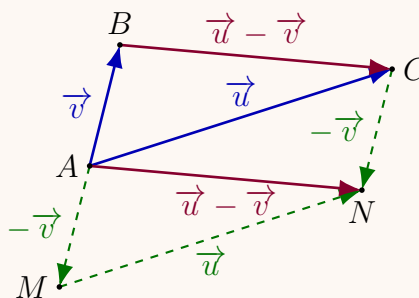
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

5. Différence de 2 vecteurs.

Soustraire un vecteur, c'est ajouter son opposé.

Ainsi, la différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} - \vec{v}$, est le vecteur $\vec{u} + (-\vec{v})$.

Construction de $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ de 3 façons : comme $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$ (avec $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$),
ou comme $-\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ ou encore comme $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$



IV. Produit d'un vecteur par un réel.

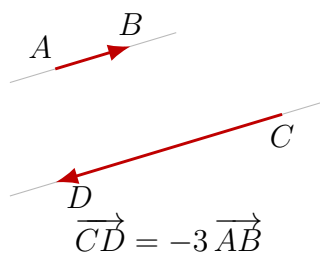
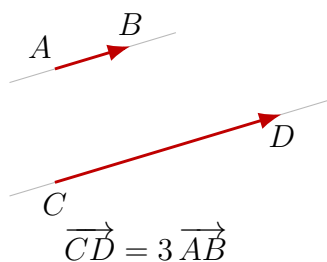
REMARQUE(S)

$|k|$ est la valeur absolue du nombre k définie par :
 $|k| = k$ si $k \geq 0$
et $|k| = -k$ si $k < 0$.

DÉFINITION 9

Soit k un nombre réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur différent du vecteur nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur ayant :

- la même direction que $\vec{u}$,
- le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et de sens contraire à $\vec{u}$ si $k < 0$,
- et pour norme $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$.



PROPRIÉTÉ 5

Propriétés admises : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k et k' deux réels. On a :

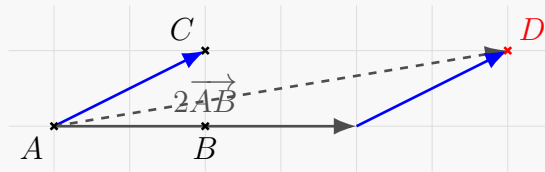
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $(kk')\vec{u} = k(k'\vec{u})$
- $0\vec{u} = \vec{0}$

EXEMPLE 3

$$\begin{aligned}2(\vec{AB} + \vec{CD}) &= 2\vec{AB} + 2\vec{CD}. \\3\vec{AB} + 5\vec{BA} &= 3\vec{AB} - 5\vec{AB} = -2\vec{AB}. \\2(3\vec{AB}) &= 6\vec{AB}.\end{aligned}$$

EXERCICE(S) D'APPLICATION

Soient A , B et C trois points non alignés.
Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



DÉFINITION 10

Deux vecteurs non nuls ayant la même direction sont dits **colinéaires**. Ainsi, pour tout réel k , les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont colinéaires.

REMARQUE(S)

Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur. On reverra cette notion en détail dans le chapitre sur la géométrie repérée.